

技术方法

DOI: 10.13406/j.cnki.cyx.002565

双参数广义增长模型在 COVID-19 中的应用及意义

马晓阳¹, 杨忠豪², 江泽友³

(1. 成都中医药大学医学技术学院, 成都 611137; 2. 西南交通大学土木工程学院, 成都 610031;

3. 成都中医药大学附属医院检验科, 成都 610072)

【摘要】目的:分析中国、意大利和美国新型冠状病毒肺炎(coronavirus disease 2019, COVID-19)疫情历经的发展阶段及当前疫情所处的情势,为各国疫情的发展趋势提供预测和参考。**方法:**基于双参数广义增长模型建立 COVID-19 动力学模型,对中国、意大利和美国累计感染人数分阶段进行非线性拟合,分析各阶段增长模式、感染率及有效再生数 R_t ,并对中国、意大利和美国累计感染人数进行短期模拟预测分析。中国、意大利和美国拟合数据分别来自中国国家卫生健康委员会及湖北省健康卫生委员会网站每日疫情通报、意大利民事保护部门疫情通报和美国约翰斯·霍普金斯大学实时统计数据。中国疫情数据统计时间段为 2020 年 1 月 11 日至 3 月 3 日,意大利、美国疫情数据统计时间段为 2020 年 2 月 13 日至 4 月 25 日。**结果:**根据模型得出,当存在人为干预时,COVID-19 累计感染人数不同阶段表现出不同的增长模式,第 1 阶段呈无障碍指数增长,第 2、3 阶段呈次指数增长,第 4 阶段呈次线性增长。中国于 2 月 19 日进入第 4 阶段($p=-1.902\ 2$, $R_t=0.970$)。截至 4 月 25 日,意大利已处于第 3 阶段($p=0.010\ 0$, $R_t=1.001$),而美国仍处于第 2 阶段($p=0.500\ 5$, $R_t=1.065$)。预测分析结果显示中国第 2 阶段实际感染人数显著小于预测感染人数,意大利和美国 5 月 10 日累计感染人数分别为 242 582 和 1 556 286 人。**结论:**截至 4 月 25 日,中国疫情基本得到遏制;意大利疫情得到放缓,但仍然存在蔓延风险;美国疫情处于持续上升阶段,短期不会出现明显回落,且第 2 阶段将会持续很长时间。

【关键词】新型冠状病毒肺炎;非线性拟合;指数;次指数;次线性;有效再生数**【中图分类号】**R183**【文献标志码】**A**【收稿日期】**2020-04-07

Application and significance of 2-parameter generalized growth model in COVID-19

Ma Xiaoyang¹, Yang Zhonghao², Jiang Zeyou³

(1. College of Medical Technology, Chengdu University of Traditional Chinese Medicine;

2. School of Civil Engineering, Southwest Jiaotong University; 3. Clinical Laboratory,

Affiliated Hospital of Chengdu University of TCM)

【Abstract】Objective: To analyze the development stages and the current situation of coronavirus disease 2019 (COVID-19) in China, Italy and America, and to provide a forecast and reference for the development trend in each country. **Methods:** Based on the 2-parameter generalized growth model, the dynamic model of COVID-19 was established, and the cumulative number of infections in China, Italy and America was fitted nonlinearly in each stage. Growth patterns, infection rate and effective reproduction number (R_t) were analyzed. A short-term simulation and prediction analysis were conducted for the cumulative number of infections in China, Italy and the United States. The fitting data for China, Italy and the United States were obtained from the website of National Health Commission of PRC and Health Commission of Hubei province, the Italian civil protection department and Johns Hopkins University in the United States, respectively. The statistical data in China is from 11 January to 3 March, Italy and America is from 13 February to 25 April. **Results:** According to the model, when there is human intervention, the cumulative number of COVID-19 infections shows different growth patterns in different stages. The first stage shows the exponential growth, the second and the third stage show sub-exponential growth, and the fourth stage shows sub-linear growth. China has entered the fourth stage on 19 February ($p=-1.902\ 2$, $R_t=0.970$). Up to 25 April, Italy is in the third stage ($p=0.010\ 0$, $R_t=1.001$) and America is still in the second stage ($p=0.500\ 5$, $R_t=1.065$). Predictive analysis shows that the actual number of infections in the second stage in China is significantly lower than the predicted number of infections, and the cumulative number of infections in Italy and America on 10 May will be 242 582 and 1 556 286,

作者介绍: 马晓阳, Email: 18408275034@163.com,

研究方向: 疾病数据分析、疾病分子诊断。

通信作者: 江泽友, Email: 9279996@qq.com。

优先出版: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1046.R.20200704.1046.002.html>

(2020-07-06)

respectively. **Conclusion:** Up to 25 April, the epidemic in China has been basically contained and that in Italy has been slowed down, but there is still a risk of spread. The epidemic situation in the United States is in a sustained upward stage, and there will be no significant fall in a short term. The second stage in

the United States will continue for a long time.

[Key words] coronavirus disease 2019; nonlinear fitting; exponential; sub-exponential; sub-linearity; effective reproduction number

2019年底暴发了一种由新型冠状病毒(2019 novel coronavirus, 2019-nCoV)引发的重大疫情,世界卫生组织(World Health Organization, WHO)于2020年1月30日宣布将其暴发作全球公共卫生紧急突发事件,2020年2月11日将感染2019-nCoV引发的疾病命名为新型冠状病毒肺炎(coronavirus disease 2019, COVID-19)^[1]。这是继2002年严重急性呼吸综合征冠状病毒(severe acute respiratory syndrome coronavirus, SARS-CoV)和2012年中东呼吸综合征冠状病毒(Middle East respiratory syndrome coronavirus, MERS-CoV)之后的第3次冠状病毒暴发^[2]。COVID-19的主要临床表现为干咳、发热、乏力,少数患者伴有鼻塞、流涕、咽痛、肌痛和腹泻等症状。重症患者多在发病1周后出现呼吸困难或低氧血症,严重者可快速进展为急性呼吸窘迫综合征、脓毒症休克及多器官衰竭等^[3]。截至2020年4月25日,COVID-19造成全球超过280万人感染,20万人死亡。疫情防控依赖于科学研判,依靠稳定的模型、合理的参数和精准的预测。由于中国、意大利及美国是最为典型的疫情发生国家,故本研究对这3个国家累计感染人数进行非线性拟合,分析影响疫情发展的因素,从而为疫情的发展趋势和防治措施提供参考。

1 材料与方法

1.1 数据来源

中国疫情数据来自中华人民共和国国家卫生健康委员会及湖北省健康卫生委员会网站每日疫情通报,意大利疫情数据来自意大利民事保护部门疫情通报,美国疫情数据来自约翰斯·霍普金斯大学发布的实时统计数据。中国疫情数据统计时间段为2020年1月11日至3月3日,意大利、美国疫情数据统计时间段为2020年2月13日至4月25日。数据采集用每天更新的前一天~24时病例更新数据,数据类型为各国累计感染人数及每日新增感染人数。

1.2 统计模型

经典流行病学的的一个基本理论^[4]:在流行病传播早期阶段,由于资源不受限制、无干预措施,其增长模式呈指数型增长,这就是广义增长模型(generalized growth model, GGM):

$$C(t) = C'(0)e^{rt} \quad (1)$$

式中, $C'(0)$ 指初始感染人数; $C(t)$ 指 t 时刻的累计感染人数; r 表示增长率的参数, $r > 0$, 单位为 $1/t$ 。

其中, 增长率 r 与 R_0 密切相关, R_0 源自 SIR 传染病模型, $R_0 = 1 + r/\gamma$, $1/\gamma$ 表示平均传染期。式(1)满足:

$$\frac{dC(t)}{dt} = C'(t) = rC(t) \quad (2)$$

式中, $C'(t)$ 指 t 时刻的感染率, 即累计感染人数曲线图 t

时刻的导数值。

估算感染人数的前提是假设流行病前几“代”感染率呈指数增长, 许多学者通过指数增长模型对流行病暴发过程开展了广泛的研究^[4-6]。然而, 由于空间接触结构受限、人群行为改变、疫情防控措施, 导致流行病暴发常呈次指数级增长, 如艾滋病、埃博拉、手足口病等^[7]。

模拟次指数增长的等效方法是调节增长率 r 而非累计感染人数。GGM 是常用的现象学模型, 考虑到次指数增长动态模型在经验数据中更为常见, 本研究从人口统计学的角度拓展 GGM, 在式(2)的基础上, 引入参数 p ($p \in [0, 1]$), 称之为增长率的负加速度参数^[7-9]。 p 可调节 r , 从而允许感染率在常数到指数增长范围内变化^[4, 9]。引入参数 p 后可使 GGM 适用于疫情发展初期的指数增长、发展中的次指数增长及发展后期的次线性增长。具体如下:

$$C'(t) = rC(t)^p \quad (3)$$

对于 $0 < p < 1$, 式(3)的解由如下的 m 次多项式给出^[4, 9]:

$$C(t) = \left(\frac{r}{m}t + A \right)^m \quad (4)$$

式中, m 是正整数; $p = 1 - 1/m$; $A = \sqrt[m]{C(t_0)}$, A 是取决于 $C(t_0)$ 初值的常数。

多项式方程(4)的显解为:

$$C_{sub\ exp}(t) = (r(1-p)t + A)^{\frac{1}{1-p}} \quad (5)$$

式中, $C_{sub\ exp}(t)$ 表示次指数增长阶段 t 时刻累计感染人数。将参数的范围扩展为 $p \leq 1$, 分析得到: ①当 $p = 1$ 时, $C_{sub\ exp}(t)$ 及感染率均呈指数增长; ②当 $0 < p < 1$ 时, $C_{sub\ exp}(t)$ 呈次指数增长, 且 p 越接近 1, $C_{sub\ exp}(t)$ 越接近指数增长, 分 3 种情况解释: 当 $0 < p < 0.5$, $C_{sub\ exp}(t)$ 呈次指数增长模型, 感染率呈下凸状, 其增速放缓; 当 $p = 0.5$, 感染率呈线性增长, $C_{sub\ exp}(t)$ 遵循二次多项式; 当 $0.5 < p < 1$, 感染率呈上凹状, 其增速大于线性; ③当 $p = 0$ 时, $C_{sub\ exp}(t)$ 呈线性增长, 感染率为常数; ④当 $p < 0$ 时, $C_{sub\ exp}(t)$ 将呈次线性增长, 感染率接近 0。双参数广义增长模型中感染率在整个流行病阶段的变化趋势如图 1 所示。

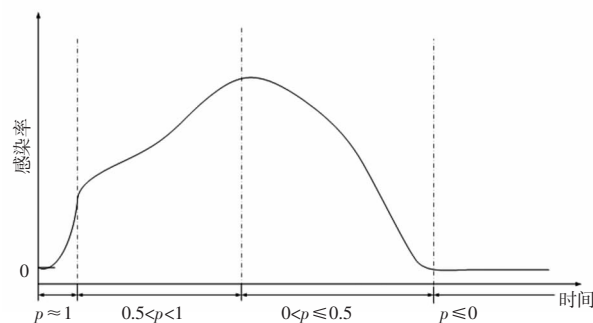


图 1 感染率 $C'(t)$ 随时间变化趋势模式图

基本再生数 R_0 是流行病数学模型中最重要的参数,它可以评价在没有干预的情况下传染病在易感人群中的传播程度^[10]。在流行病模型中,一般有一个疾病消除平衡点和至少一个地方病平衡点,这些平衡点的稳定性由再生数 R_0 决定,当 $R_0 < 1$,疾病消除平衡点稳定,该疾病可以消除;当 $R_0 > 1$,疾病消除平衡点不稳定,此传染病将蔓延。 R_0 值越高表明疫情越严重,而 R_0 值主要取决于疾病的传染率、人与人的接触率及传播时间^[11]。有效再生数 R_t 是指 t 时刻开始出现症状的一个患者平均能够感染的人数。由于易感人群的减少(内在因素)和防控措施的实行(外在因素), R_t 常随时间变化而变化。面对 COVID-19 疫情,中国、意大利和美国采取不同强度的防控措施。本文采用有效再生数 R_t 评估各国疫情的控制情况,尤其是当下所采取的防控措施能否使 R_t 降到 1 以下。 R_t 将采取如下公式计算^[7,12]:

$$R_t = \frac{C[(g+1)T_g+1]}{C[gT_g]} = \left[1 + \frac{r(1-p)T_g}{r(1-p)gT_g+A}\right]^{p/(1-p)} \quad (6)$$

式中, g 表示 COVID-19 传染后代数; T_g 表示生成时间间隔,指感染者和被感染者出现症状的时间间隔。

本文拟采用式(5)对中国、意大利和美国 COVID-19 累计感染人数构建数学动力学模型,并采用式(6)分析有效再生数的变化趋势。在假定易感人群的消耗忽略不计和干预强度维持不变的前提下,对中国和美国第 2 阶段、意大利第 3 阶段累计感染人数进行模拟和预测。

1.3 节点选择

各阶段节点选择主要参考疫情发展的关键时间节点。节点 1 为各国政府限制人口流动时^[13](中国 2 月 23 日武汉“封城”;美国 3 月 16 日旧金山“封城”;意大利 3 月 10 日全国范围内“封城”)。节点 2 为新增感染人数达到拐点(最高峰)时。其中,中国在 2 月 12 日至 15 日将临床诊断纳入新增感染人数,导致其骤升,故不将其作为拐点。截至 4 月 25 日美国新增感染人数拐点尚未观察到。节点 3 为新增感染人数趋于平缓开始。由于国家卫健委 3 月 4 日开始统计境外输入,中国第 4 阶段结束时间定为 3 月 3 日(图 2)。

1.4 统计学处理

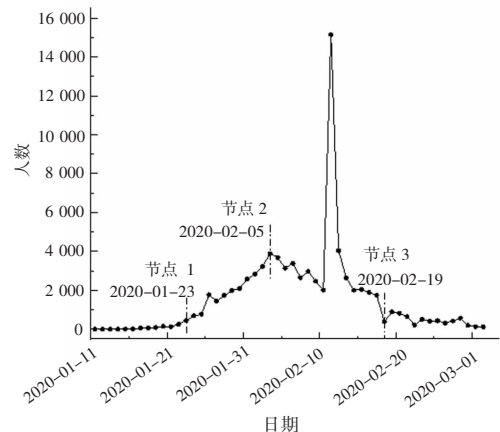
本研究采用的拟合方程均为式(5)。采用 1stOpt 软件,利用麦夸特法(Levenberg-Marquardt, LM)和通用全局优化算法(universal global optimization, UGO)进行非线性拟合。通过累计感染人数模拟 COVID-19 的流行趋势,拟合不同阶段的最优参数 r 和 p 。算法参数设定如下:收敛判断指标, $1.00E-10$;最大迭代数, 2 000;实时输出控制数, 500。

2 结果

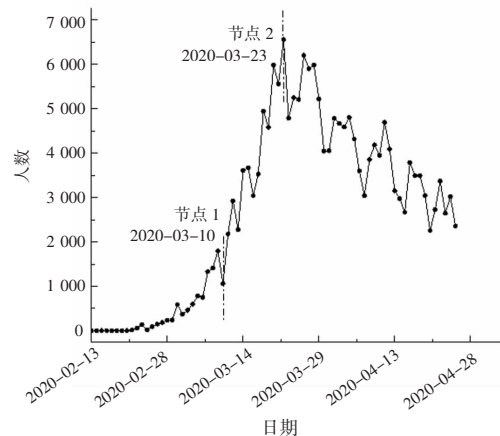
2.1 中国累计感染人数拟合及预测

中国累计感染人数拟合第 1 阶段为 2020 年 1 月 11 日至 1 月 22 日, COVID-19 累计感染人数拟合参数 $r=0.328$, $p=1.020$, $C(0)=8.167$, 显示累计感染人数和感染率呈指数增长。第 2 阶段为 1 月 23 日至 2 月 18 日, 拟合参数 $r=10.059$ 、

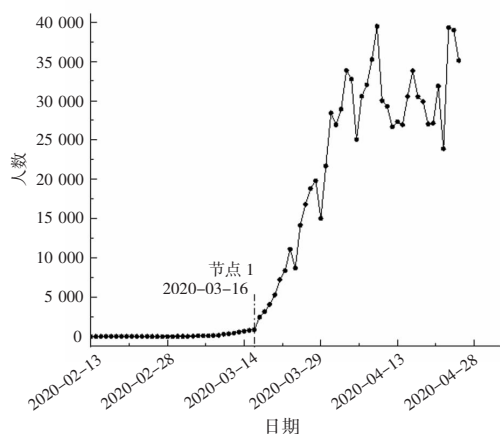
$p=0.585$, $C(t_0)=345.870$, 显示累计感染人数呈次指数增长, 且感染率的增速呈上升阶段。第 3 阶段为 2 月 5 日至 2 月 18 日, 拟合参数 $r=1\,342.973$, $p=0.099$, $C(t_1)=23\,500.072$, 显示累计感染人数呈次指数增长, 且感染率增速放缓。第 4 阶段为 2 月 19 日至 3 月 3 日, 拟合参数 $r=9.1902E+11$, $p=-1.902$, $C(t_2)=74\,500.000$, 说明疫情基本进入平台期。此外, 可以看出中国第 2 阶段实际感染人数显著少于预测人数(图 3)。



A. 中国每日新增感染人数



B. 意大利每日新增感染人数



C. 美国每日新增感染人数

图 2 3 国每日新增感染人数

2.2 意大利累计感染人数拟合及预测

意大利累计感染人数拟合第 1 阶段为 2 月 13 日至 3 月

9日, COVID-19 累计感染人数拟合参数 $r=0.291$ 、 $p=1.010$ 、 $C(0)=3.000$, 显示累计感染人数和感染率呈指数增长。第 2 阶段为 3 月 10 日至 3 月 22 日, 拟合参数 $r=3.253$ 、 $p=0.692$ 、 $C(t_0)=8\,718.941$, 显示累计感染人数呈次指数增长, 感染率的增速呈上升趋势。第 3 阶段为 3 月 23 日至 4 月 25 日, 拟合参数 $r=3\,504.430$ 、 $p=0.010$ 、 $C(t_1)=62\,999.201$, 显示累计感染人数呈次指数增长, 感染率增速开始放缓(图 4)。

2.3 美国累计感染人数拟合及预测

美国累计感染人数拟合第 1 阶段为 2 月 13 日至 3 月 15 日, COVID-19 累计感染人数拟合参数 $r=0.151$ 、 $p=1.075$ 、 $C(0)=4.000$, 显示累计感染人数和感染率呈指数增长。第 2 阶段为 3 月 16 日至 4 月 25 日, 拟合参数 $r=47.061$ 、 $p=0.500$ 、 $C(t_0)=1\,999.986$, 显示累计感染人数呈次指数增长, 感染率增速呈上升阶段(图 5)。

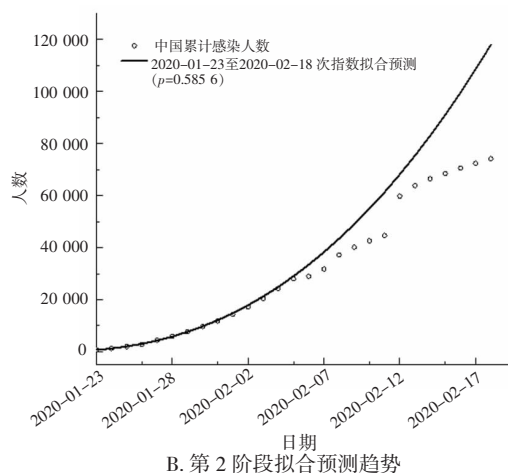
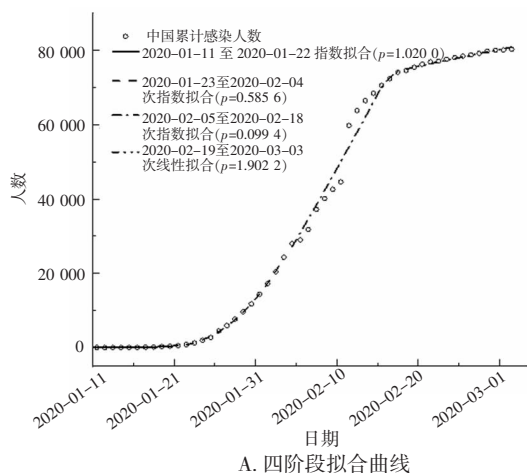


图 3 中国累计感染人数拟合曲线

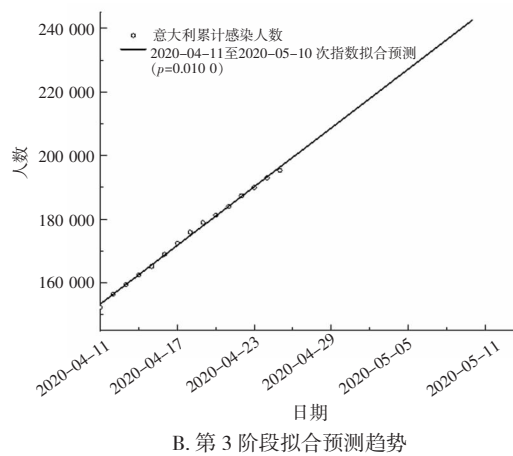
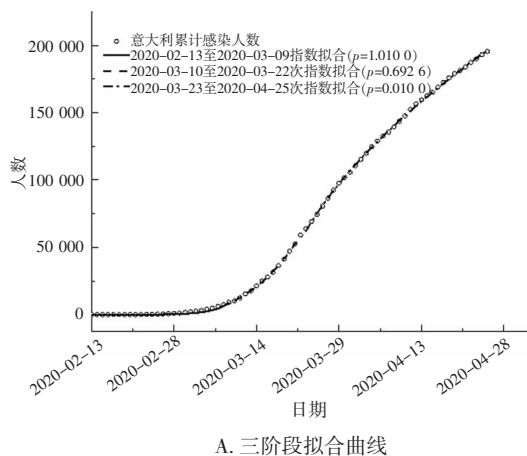


图 4 意大利累计感染人数拟合曲线

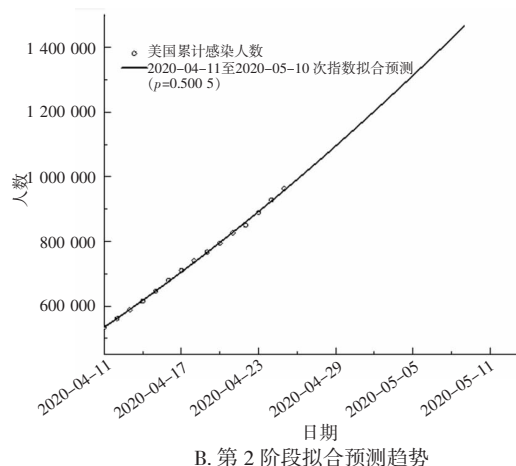
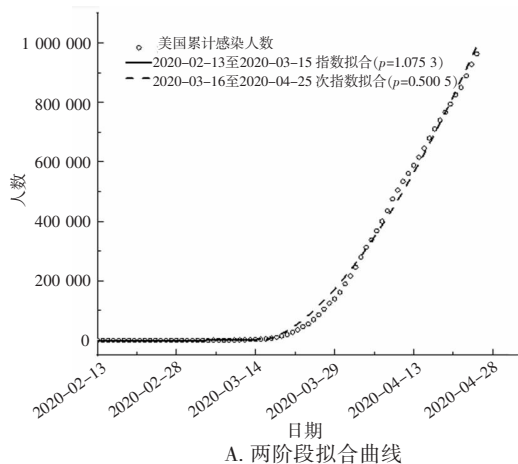
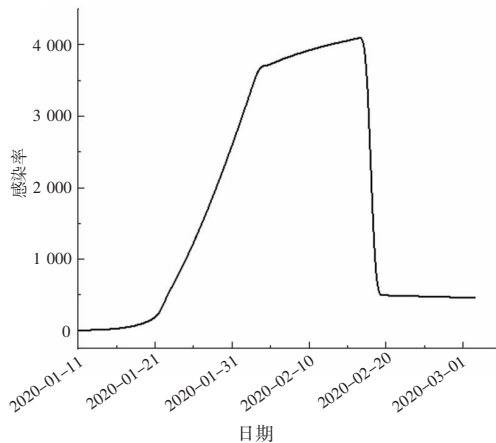


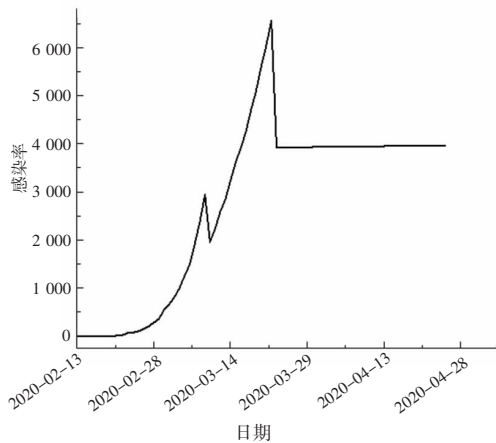
图 5 美国累计感染人数拟合曲线

2.4 感染率变化趋势

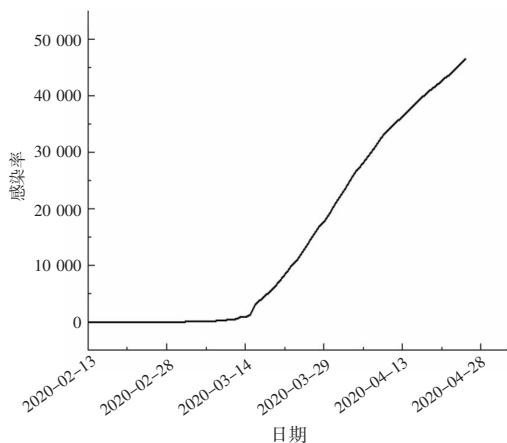
中国 COVID-19 的感染率从上升—平缓—下降,经历了完整的流行病学感染率变化模式。意大利感染率已逐渐趋于平缓,美国的感染率仍处在上升阶段(图 6)。



A. 中国感染率 $C'(t)$ 图



B. 意大利感染率 $C'(t)$ 图



C. 美国感染率 $C'(t)$ 图

图 6 3 国感染率 $C'(t)$ 趋势图

2.5 有效再生数 R_t 变化趋势

生成时间间隔 T_g 的均值及其分布形态对疫情传播强度和有效再生数有很大影响^[14]。根据 COVID-19 早期阶段的流行病特征分析,生成时间间隔 $T_g = (7.5 \pm 3.4)$ d^[15]。本文采取

$T_g = 5$ d。中国 R_t 从 1 月 11 日开始计算,截至日期为 3 月 3 日。意大利和美国两国从 2 月 13 日开始计算,截至 4 月 25 日。见表 1。

表 1 中国、意大利和美国有效再生数 R_t 计算结果

传染后代数(g)	中国	意大利	美国
1	6.291	4.569	2.707
2	6.739	4.676	2.917
3	1.421	4.790	3.181
4	1.325	4.909	3.523
5	1.264	5.036	3.980
6	1.014	1.260	4.615
7	1.012	1.233	1.136
8	1.011	1.001	1.120
9	0.968	1.001	1.107
10	0.969	1.001	1.097
11	0.970	1.001	1.088
12	/	1.001	1.081
13	/	1.001	1.075
14	/	1.001	1.070
15	/	1.001	1.065

3 讨论

在流行病中,估计和检验统计模型是对疫情实时传播规律、潜伏期分布、疫情走势等进行科学判断的重要手段,是疫情防控过程中统计理论与实践相结合最直接的方式^[16]。因此,统计模型对于流行病的研究具有十分重要的意义。双参数广义增长模型已被用于研究多种流行病,该模型可评估流行病缓解前后增长变化趋势,也可揭示流行病爆发的多样性。Viboud 等^[17]研究了人类历史上发生过的 20 次重大流行病,包括天花、鼠疫、麻疹、口蹄疫、霍乱、HIV、埃博拉等,证实双参数广义增长模型合理有效,能很好地模拟流行病的生长模式。此外,有研究显示其短期预测效果优于 SEIR 模型,对准确评估疫情具有重要意义^[7]。

本研究通过双参数广义增长模型对中国、意大利和美国 COVID-19 累计感染人数进行模拟,结果表明本研究各阶段时间节点选取合理,拟合曲线与实测曲线高度吻合,能合理地模拟 COVID-19 的发展趋势。《新型冠状病毒肺炎诊疗方案(试行第七版)》指出^[9],COVID-19 确诊方法是通过病毒核酸检测、病毒基因测序及病毒特异性抗体检测,但由于早期湖北省核酸试剂盒短缺,实验室检测量有限,许多专家呼吁将 CT 影像作为 COVID-19 诊断依据。因此 2 月 12 日开始湖北省将临床诊断也作为 COVID-19 的确诊依据,导致 2 月 12 日新增感染人数为 15 152 例(包括 13 332 例临床诊断)。由于模型无法模拟疫情发展的骤变,故整体上中国拟合效果与美国和意大利相比稍逊。

尺度参数 p 可反映政府的干预措施和公众行为变化所带来的防控影响。对中国、意大利和美国累计感染人数进行

拟合,结果表明各国第 1 阶段 p 值均约为 1, COVID-19 感染人数均呈指数增长。其原因为疫情发展初期,资源不受限制,公众缺乏医疗卫生意识,以及缺乏完善的预防、诊断、治疗方案。第 2 阶段,各国 $0.5 < p < 1$,表明该阶段 COVID-19 感染人数呈次指数增长,且感染率的增速呈上升趋势。经过上一阶段的迅猛发展,政府采取相应的疫情防控措施以及人们防护意识增强,疫情传播得到一定程度的抑制。第 3 阶段,中国和意大利 $0 < p < 0.5$,表明该阶段 COVID-19 感染人数呈次指数增长,感染率增速放缓,疫情防控开始显效。中国第 3 阶段持续 14 d 即进入第 4 阶段,第 4 阶段的到来表示疫情基本得到控制。截至 4 月 25 日,意大利第 3 阶段已持续 34 d,第 4 阶段尚未到来,而美国第 2 阶段仍未结束。

对中国第 2 阶段进行回溯性模拟分析,显示疫情早期若中国未积极采取防控措施,预测在 2 月 17 日中国累计感染人数将突破 10 万,而当日实际累计感染人数为 72 436 例。此外,中国第 3 阶段共持续 14 d 便进入第 4 阶段。这一阶段 $R_t < 1$,疫情基本得到控制,这得益于疫情暴发后的综合施策、联防联控^[17]。但中国从 3 月 4 日起面临境外输入的风险,因此应重点做好境外疫情输入防控工作。

面对 COVID-19 的暴发,由于西方国家未引起重视及官方媒体的错误引导,错过了 2 月份这个黄金防疫阶段,使众多国家沦陷。由于美国试剂盒技术问题、监管障碍、官僚机构矛盾、缺乏领导力等多个方面原因,2 月份几乎没有采取任何防控措施。直至 3 月 13 日联邦政府宣布全美进入紧急状态,各州才加速大规模检测及治疗。截至 4 月 25 日,美国 COVID-19 累计感染人数已达 96 万例,且这一数字仍在持续增长,其 $R_t = 1.065$,疫情仍处于蔓延阶段,相当于中国 2 月初的水平。若美国不加强防控力度、扩大检测力度,并找出感染者,隔离密切接触者,预计 5 月 10 日累计感染人数可能达到 1 556 286 例,每日新增感染人群的峰值将会不断出现。这将使美国疫情传播人数的拐点后移,并可能使疫情的增速出现多个峰值。

疫情暴发后,意大利感染人数在极短时间内暴增,医疗体系超负荷运转。随着呼吸机等物资及专业医疗援助团队的抵达,隔离措施有效施行。目前意大利新增感染人数拐点已经出现,第 2 阶段结束,进入了第 3 阶段,疫情初见成效, R_t 逐渐减小并接近 1,相当于中国 2 月中旬的水平。截至 4 月 25 日, $R_t = 1.001$,意大利累计感染人数已逐渐进入平台期,但疫情仍存在蔓延风险。第 3 阶段的预测分析表明,在不改变现有措施的前提下,预计 5 月 10 日累计感染人数最高会达到 242 582 例,故意大利应该继续保持并加强防控措施。

综上所述,利用双参数广义增长模型获得了中国、意大利和美国 COVID-19 疫情暴发的增长模式。该模型可有效描述 COVID-19 的增长模式和传播情况,且准确评估有效再生数 R_t 和防控措施的潜在影响。但本研究也存在一定的局限性,如仅考虑了有症状及接受检测的感染者。由于存在无症状感染者及未接受核酸检测的感染者, p 值和 R_t 可能存在估算偏差,对预测结果造成一定影响。

参 考 文 献

- [1] 郭 岩,黄旻木,黄 捷,等. 新型冠状病毒肺炎疫情的全球流行现状和其对中国的影晌及政策建议[J]. 中华流行病学杂志,2020,41(5):643-648.
- [2] Rothan HA, Byrareddy SN. The epidemiology and pathogenesis of coronavirus disease (COVID-19) outbreak [J]. J Autoimmun, 2020, 17(3):2708-2724.
- [3] 国家卫生健康委. 新型冠状病毒肺炎诊疗方案(试行第七版) [EB/OL]. (2020-03-04) [2020-03-31]. <http://www.nhc.gov.cn/yzygj/s7653p/202003/46c9294a7dfe4cef80dc7f5912eb1989.shtml>.
- [4] Viboud C, Simonsen L, Chowell G. A generalized-growth model to characterize the early ascending phase of infectious disease outbreaks epidemics[J]. Epidemics, 2016, 15:27-37.
- [5] Anderson RM, May RM, Mollison D. Infectious diseases of humans: dynamics and control[J]. Nature, 1992, 358(6381):29-30.
- [6] Kermack WO, McKendrick AG. Contributions to the mathematical theory of epidemics; IV. Analysis of experimental epidemics of the virus disease mouse ectromelia[J]. J Hyg(Lond), 1937, 37(2):172-187.
- [7] Chowell G, Viboud C, Simonsen L, et al. Characterizing the reproduction number of epidemics with early sub-exponential growth dynamics[J]. J R Soc Interface, 2016, 13(123):20160659.
- [8] Reppell M, Boehnke M, Zöllner S. The impact of accelerating faster than exponential population growth on genetic variation[J]. Genetics, 2014, 196(3):819-828.
- [9] Tolle J. Can growth be faster than exponential, and just how slow is the logarithm?[J]. Math Gaz, 2003, 87(510):522-525.
- [10] Hernandez-Suarez CM. A Markov chain approach to calculate R_0 in stochastic epidemic models[J]. J Theor Biol, 2002, 215(1):83-93.
- [11] 杨 光, 刘 潇. 再生数 R_0 的计算及其控制策略[J]. 生物数学学报, 2008, 23(4):750-756.
- [12] Roberts MG, Heesterbeek JAP. Model-consistent estimation of the basic reproduction number from the incidence of an emerging infection [J]. J Math Biol, 2007, 55(5-6):803-816.
- [13] 张 琳. 新冠肺炎疫情传播的一般增长模型拟合与预测[J]. 电子科技大学学报, 2020[Epub ahead of print]. DOI: 10.12178/1001-0548.2020037.
- [14] Wallinga J, Lipsitch M. How generation intervals shape the relationship between growth rates and reproductive numbers[J]. Proc Biol Sci, 2007, 274(1609):599-604.
- [15] Li Q, Guan XH, Wu P, et al. Early transmission dynamics in Wuhan, China, of novel coronavirus-infected pneumonia[J]. N Engl J Med, 2020, 382(13):1199-1207.
- [16] 阮 敬, 刘雅楠, 任 韬, 等. 新冠肺炎疫情影响下的统计科学研究新模式与新趋势——“科学抗疫、统计担当——全国统计科学线上高端论坛”综述[J]. 数理统计与管理, 2020[Epub ahead of print]. DOI: 10.13860/j.cnki.slty.20200331-006.
- [17] 张新庆, 王明旭, 蔡笃坚. 新冠肺炎疫情防控中的“相称性原则”解析[J]. 中国医学伦理学, 2020, 33(3):261-267.

(责任编辑:冉明会)